表題

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　)

(1) $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$ とする。

(a)全ての正の実数xに対し、$f(x)\geqq 0$ を示せ。

(b) $e\geqq\frac{8}{3}$ を示せ。

(2)自然対数の底eの定義式、$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ を用いて、

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$ を示せ。

(3)全ての自然数nに対して、$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\leqq\frac{1}{e}$ を示せ。

(4)箱の中に、(n−1)個の赤玉と、1個の白玉を入れる。箱の中から玉を1回取り出しては元に戻す試行をn回繰り返す。この時少なくとも1回は白玉を引く確率をp(n)とする。

(a) p(4)を求めよ。

(b) $p(10000)\geqq\frac{5}{8}$ を示せ。

解説

解答

(1)(a)

$f'(x)=e^x-1-x-x^2$　$f''(x)=e^x-1-x$　$f'''(x)=e^x-1$　$f''''(x)=e^x$

$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$　である。

$f''''(x)\geqq 0$　から、$f'''(x)$はx≧0で単調増加。ここで$f'''(0)=0$から、$f'''(x)\geqq 0$

$f'''(x)\geqq 0$　から、$f''(x)$はx≧0で単調増加。ここで$f''(0)=0$から、$f''(x)\geqq 0$

$f''(0)\geqq 0$　から、$f'(x)$はx≧0で単調増加。ここで$f'(0)=0$から、$f'(x)\geqq 0$

$f'(x)\geqq 0$　から、f(x)はx≧0で単調増加。ここf(0)=0から、$f(x)\geqq 0$　終

(b)全ての正の実数xに対し、$f(x)\geqq 0$ から、$f(1)\geqq 0$　よって、

$e-1-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\geqq 0$　$\therefore e\geqq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{8}{3}$　終

(2)

$x=-\frac{1}{t}$ とおくと、$x\to\infty$ のとき、$t\to 0$

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}$　ここで、自然対数の底eの定義式より、

$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$　だから、$\lim_{t\to 0}\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{e}$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$　終

（3）

nを自然数とする。

$1-\frac{1}{n} \leqq 1-\frac{1}{n+1}$　より、$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leqq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$　…①

また、$0<1-\frac{1}{n+1}<1$　だから、$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \leqq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$　…②

①、②から、$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leqq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

従って、$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$は、nが増えるにつれて、単調に増加する。

これと、$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$　から、全ての自然数nに対して、$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\leqq\frac{1}{e}$　終

別解　$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$　とおいて、$f(x)$が$x\geqq 1$で単調増加することを示す。

ここで、$f'(x)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-1}$　より、　$x\geqq 1$で　$f'(x)\geqq 0$

よって、$f(x)$は$x\geqq 1$で単調増加する。

これと、$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$　から、$x\geqq 1$のとき、$\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\leqq\frac{1}{e}$

∴全ての自然数nに対して、$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\leqq\frac{1}{e}$　終

（4）(a)

p(4)は、

「箱の中に、３個の赤玉と、１個の白玉を入れて、箱の中から玉を１回取り出しては元に戻す試行を４回繰り返す時、少なくとも１回は白玉を引く確率」

である。

余事象は、「４回の試行で、１回も白玉を引かない確率（つまり、４回とも赤玉を引く確率）であり、その確率は、

$\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{81}{256}$

であるから、求める確率は、$1-\frac{81}{256}=\frac{175}{256}$　答

(b)

まず、p(n)を求める。

求める確率の余事象は、「n回の試行で、１回も白玉を引かない確率（つまり、n回とも赤玉を引く確率）」であり、その確率は、

$\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

であるから、$p(n)$**は、**$\mathbf{1}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$　…③

ここで、$(\mathbf{3})$**から、全ての自然数**n**に対して、**$\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\leqq\dfrac{1}{e}$　**より、**

$\mathbf{1}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\geqq\mathbf{1}-\dfrac{1}{e}$　…④

また、$(\mathbf{1})$**から、**$e\geqq\dfrac{8}{3}$**より、**$\dfrac{1}{e}\leqq\dfrac{3}{8}$　**よって、**$\mathbf{1}-\dfrac{1}{e}\geqq\mathbf{1}-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$　…⑤

③、④、⑤から、全ての自然数n**に対して、**$p(n)\geqq\dfrac{5}{8}$

よって、$n=10000$**とすれば、**$p(10000)\geqq\dfrac{5}{8}$　$\boxed{終}$

$\boxed{参考}$　**直接**$p(10000)$　**を求めると、**$\mathbf{1}-\left(\dfrac{9999}{10000}\right)^{10000}$**が得られるが、これは計算できそうにない。そこで、**$(\mathbf{1})$**や**$(\mathbf{3})$**の利用を考える。**