表題

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

(**1**)公式　$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　を導け。ただし、a,b,c＞0かつa,b,c≒1とする。

(**2**)数列$\{a_k\}$を、$a_{k+1}=a_k+1$　$a_1=\alpha$（$\alpha>0$、$\alpha\fallingdotseq1$）で定義し、数列$\{b_n\}$を

$b_n=(\log_{a_1}a_2)\times(\log_{a_2}a_3)\times(\log_{a_3}a_4)\times\cdots\times(\log_{a_n}a_{(n+1)})$　（$n\geqq1$）で定義する。

(**a**)$\alpha=2$のとき、b_2を求めよ。

(**b**)$b_1=2$のとき、αを求めよ。

(**c**)αを2以上の自然数に限定する。$b_n=3$かつ$n\leqq100$を満たす自然数$(\alpha、n)$の組を全て求めよ。

(**3**)関数$f(x)=\log_x(x+1)$　は、$x>1$で単調減少することを示せ。

(**4**) $\log_{26}27$ と $\sqrt[24]{3}$ はどちらが大きいか？理由をつけて答えよ。

(解説)

解答

(**1**)

$\log_a b=P$、$\log_c a=Q$、$\log_c b=R$　と置く。このとき、$P=\dfrac{R}{Q}$を示せばよい。

対数の定義から、$a^P=b$　…①　$c^Q=a$…②　$c^R=b$　…③

①、③より、$a^P=c^R$　…④

④に②を代入して、$(c^Q)^P=c^R$　から、$c^{QP}=c^R$

よって、$QP=R$　であるから、$P=\dfrac{R}{Q}$が示された。　終

別解

$b=c^x$　と置くと、$x=\log_b c$　…①’

また、$\log_a b=\log_a c^x$　$\Leftrightarrow$　$\log_a b=x\log_a c$　$\Leftrightarrow$　$x=\dfrac{\log_a b}{\log_a c}$　…②’

①’、②’より、$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　終

(**2**)(**a**)

$a_1=2$　より、$a_2=a_1+1=3$、$a_3=a_2+1=4$

よって、$b_2=(\log_{a_1}a_2)\times(\log_{a_2}a_3)=\log_2 3\times\log_3 4=\log_2 3\times\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}=\log_2 4=2$　答

(**b**)

$a_1=\alpha$　のとき、$a_2=a_1+1=\alpha+1$　より、

$b_1=(\log_{a_1}a_2)=\log_\alpha(\alpha+1)=2$　$\Leftrightarrow$　$\alpha^2=\alpha+1$

これを解いて、$\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　ここで、$\alpha>0$から、$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　答

(**c**)

表題

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

(**1**)**の公式を繰り返し使うと、**

$(\log_{a_1} a_2)\times(\log_{a_2} a_3)\times(\log_{a_3} a_4)\times \quad \cdots \quad \times(\log_{a_n} a_{(n+1)}) \quad =$

$(\log_{a_1} a_2)\times(\dfrac{\log_{a_1} a_3}{\log_{a_1} a_2})\times(\dfrac{\log_{a_1} a_4}{\log_{a_1} a_3})\times \quad \cdots \quad \times(\dfrac{\log_{a_1} a_{(n+1)}}{\log_{a_1} a_n}) \quad =$

$\log_{a_1} a_{(n+1)}$　**となるから、**

$b_n=\log_{a_1} a_{(n+1)}$　**である。**…①

漸化式、$a_{k+1}=a_k+1$　$a_1=\alpha$　**を解くと、**$a_n=(n-1)+\alpha$　**より、**

$a_{(n+1)}=n+\alpha$　…②

①、②**から、**$b_n=\log_{\alpha}(n+\alpha)$

求める条件は、$b_n=3$ **より、**$\log_{\alpha}(n+\alpha)=3 \quad \Leftrightarrow \alpha^3=n+\alpha$

ここで、α**は２以上の自然数であり、条件**$n\leqq 100$**も考慮して、以下の場合を考えていく。**

［**ア**］　$\alpha=2$　**のとき、**

$2^3=n+2$　**から、**$n=6$

［**イ**］　$\alpha=3$　**のとき、**

$3^3=n+3$　**から、**$n=24$

［**ウ**］　$\alpha=4$　**のとき、**

$4^3=n+4$　**から、**$n=60$

［**エ**］　$\alpha\geqq 5$　**のとき、**

$n>100$　**となり、条件**$n\leqq 100$**に不適。**

［**ア**］～［**エ**］**より、求める自然数の組は、**$(\alpha、n)=(2、6)\ (3、24)\ (4、60)$　**の３組**　答

(**3**)

$f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{\log x}$　**から、**

$$f'(x)=\frac{\dfrac{\log x}{x+1}-\dfrac{\log(x+1)}{x}}{(\log x)^2}=\frac{x\log x-(x+1)\log(x+1)}{x(x+1)(\log x)^2}$$

$x>1$**で、**$x(x+1)(\log x)^2>0$　**また、**$x\log x$**は単調増加するので、**

$x\log x-(x+1)\log(x+1)<0$

よって、$f'(x)<0$　**ゆえに、**$f(x)=\log_x(x+1)$　**は、**$x>1$**で単調減少する。**　終

注意微分公式　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\log a}$　**は、**a**が定数でなければ使えないことに注意。**

この場合は、$\dfrac{\log(x+1)}{\log x}$**としてからでないと微分できない。**

(**4**)

表題

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　)

(**2**)(**c**)でやったことと同じように計算すると、

$\log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \quad \cdots \quad \times \log_{26} 27 \quad = \quad \log_3 27 \quad = \mathbf{3} \quad \cdots①$

また、(**3**)から、

$\log_3 4 > \log_4 5 > \log_5 6 > \quad \cdots \quad > \log_{26} 27$

よって、

$\log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \quad \cdots \quad \times \log_{26} 27 \quad >$

$\log_{26} 27 \times \log_{26} 27 \times \log_{26} 27 \times \quad \cdots \quad \times \log_{26} 27 \quad =$

$(\log_{26} 27)^{24} \quad \cdots②$

①、②から、$\mathbf{3} > (\log_{26} 27)^{24}$

両辺$\dfrac{1}{24}$乗して、

$\sqrt[24]{3} > \log_{26} 27$

ゆえに、$\sqrt[24]{3}$が大きい。　答

参考(**4**)はそのまま計算できない。(**2**)で求めた、(α、$\mathbf{n}$)=(3、24)　の場合の式と、(**3**)を利用して計算する。