表題

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

（１）2000^{2005}　は6619桁の数であることを示せ。

ただし、$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$　であることを用いてよい。

（２）2005^{2005}　は6620桁以上の数であることを示せ。

解説

解答

（１）

2000^{2005}　が6619桁の数　$\Leftrightarrow$　$10^{6618} \leqq 2000^{2005} < 10^{6619}$

常用対数を取って、

$6618 \leqq 2005\log_{10} 2000 < 6619$　$\Leftrightarrow$

$6618 \leqq 2005\log_{10}(2 \times 10^3) < 6619$　$\Leftrightarrow$

$6618 \leqq 2005\log_{10} 2 + 6015 < 6619$　$\Leftrightarrow$

$603 \leqq 2005\log_{10} 2 < 604$

から、$603 \leqq 2005\log_{10} 2 < 604$　を示せばよい。

$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$　より計算すると、

$603.5050 < 2005\log_{10} 2 < 603.7055$

よって、$603 \leqq 2005\log_{10} 2 < 604$　であるから、2000^{2005}　は6619桁の数である。　終

（２）2000^{2005}　は6619桁の数であるから、

$2005^{2005} > 10 \times 2000^{2005}$　を示せば、2005^{2005}　は6620桁以上の数であることを示せる。

2005^{2005}　を　$(2000+5)^{2005}$　として、二項展開すると、

$(2000+5)^{2005}$　＝

${}_{2005}C_0 \cdot 2000^{2005} + {}_{2005}C_1 \cdot 2000^{2004} \cdot 5 + {}_{2005}C_2 \cdot 2000^{2003} \cdot 5^2 + \quad \cdots \quad + {}_{2005}C_{2005} \cdot 5^{2005}$

より、この第３項目を取り出して、

$(2000+5)^{2005} \quad > \quad {}_{2005}C_2 \cdot 2000^{2003} \cdot 5^2$　…①

ここで、${}_{2005}C_2 \cdot 2000^{2003} \cdot 5^2 \quad = \quad \dfrac{2005 \cdot 2004}{2} \cdot 2000^{2003} \cdot 5^2 \quad =$

$\dfrac{25}{2} \times 2005 \cdot 2004 \cdot 2000^{2003} \quad > 10 \times 2000^{2005}$　…②

①、②から、$2005^{2005} > 10 \times 2000^{2005}$　となり、2005^{2005}　が6620桁以上の数であることを示せた。　終

参考 去年、友人に送った年賀状の問題から出題。他にも年賀状問題に、2005がらみの問題を２問作ったが、この問題が一番の名作だと思う。