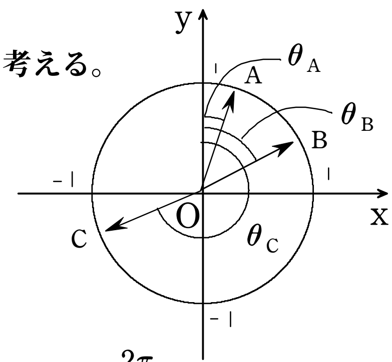
表題　時計の針についての考察



右図のように、原点を中心とする半径１の円周上に、

原点Oを始点とする、長さ１のベクトル$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$を考える。

ｔを$0 \leqq t < 43200$　を満たす整数とする。

$t=0$のとき、$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}=(0,1)$　とする。

ＯＹを動径とし、時計回りを角度の正方向とする。

y軸正の方向と、ＯＡ、ＯＢ、ＯＣがなす方向を、それぞれ

θ_A、θ_B、θ_Cとする。

ｔが１増加する毎に、θ_Aは、$\dfrac{2\pi}{60\cdot60\cdot12}$　θ_Bは、$\dfrac{2\pi}{60\cdot60}$　θ_Cは、$\dfrac{2\pi}{60}$増加する。

x,y,zを整数とし、$0 \leqq x < 12$、$0 \leqq y < 60$、$0 \leqq z < 60$　とする。

$t=3600x+60y+z$　と置くとき、次の問に答えよ。

（１）$(x,y,z)=(4,0,0)$のとき、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$　を求めよ。

ただし、ベクトル$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$の内積を$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$と表す。

（２）$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$　を満たすｔの値は、$t=0$に限られることを示せ。

（３）$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\fallingdotseq 1$　を満たすｔのうち、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　を最大にするｔの値と、このときのx,y,zの値をそれぞれ求めよ。

(解説)

（１）

$t=0$のとき、$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}=(0,1)$　から、θ_A、θ_B、$\theta_C=0$　…①

問題文より、ｔが１増加する毎に、θ_Aは、$\dfrac{2\pi}{60\cdot60\cdot12}$　θ_Bは、$\dfrac{2\pi}{60\cdot60}$　θ_Cは、$\dfrac{2\pi}{60}$増加するとあるから、これと①より、

$\theta_A=\dfrac{2\pi t}{60\cdot60\cdot12}$　$\theta_B=\dfrac{2\pi t}{60\cdot60}$　$\theta_C=\dfrac{2\pi t}{60}$　とおける。

$(x,y,z)=(4,0,0)$　のとき、$t=3600\times4+60\times0+0=14400$　から、

$\theta_A=\dfrac{2}{3}\pi$、$\theta_B=8\pi$、$\theta_C=480\pi$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos AOB=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\theta_B-\theta_A)$

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$　また、$\cos(\theta_B-\theta_A)=\cos\dfrac{22}{3}\pi=\cos\dfrac{4}{3}\pi=\cos\dfrac{2}{3}\pi=\ -\dfrac{1}{2}$から、

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{1}{2}$　(答)

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos BOC=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos(\theta_C-\theta_B)$

$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$　また、$\cos(\theta_C-\theta_B)=\cos472\pi=\cos0=1$　から、

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=1$　(答)

注意　内積の定義では、$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos\theta$　θは、$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$の成す角で、$0\leqq\theta\leqq2\pi$　とされているから、$\cos\frac{22}{3}\pi=\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\frac{2}{3}\pi$　というように、式変形してから値を求めた。

（2）

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos AOB=\cos(\theta_B-\theta_A)=1$　より、

$\theta_B-\theta_A=2\pi k$　（k=0、±1、±2、…）となる　tの値が、t=0以外に存在しないことを証明すればよい。

$$\theta_B-\theta_A=\frac{2\pi t}{60\cdot60}-\frac{2\pi t}{60\cdot60\cdot12}=\frac{11\pi t}{21600}$$

よって、$\frac{11\pi t}{21600}=2\pi k$　…①　を満たす(t、k)がt=0以外に存在しないことを示す。

①を変形して、$11t=43200k$

ここで、kは整数より、tは43200の倍数である。

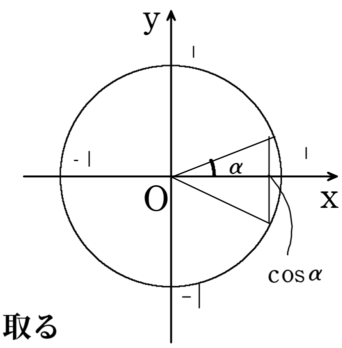
しかし、$0\leqq t<43200$　から、これを満たすtの値はt=0以外には存在しない。

t=0のときは、k=0で、$\theta_B-\theta_A=0$となり、確かに条件を満たす。

よって、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$　を満たすtの値は、t=0に限られる。　終

（3）

（2）より、$t\fallingdotseq0$　よって、$0<t<43200$　で考える。



$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos AOB=\cos(\theta_B-\theta_A)=\cos\frac{11\pi t}{21600}$$

右図より、$\cos\alpha$が最大値を取るには、

αとx軸正の方向とのなす角度が最小になればよく、

また、$\cos\alpha=\cos(-\alpha)$より、

$\cos\frac{11\pi t}{21600}$が最大値を取る　$\Leftrightarrow$　$\left|2\pi k-\frac{11\pi t}{21600}\right|$が最小値を取る

より、$\left|2\pi k-\frac{11\pi t}{21600}\right|$を最小にするような(k、t)の組み合わせを求めてやればよい。

$$\left|2\pi k-\frac{11\pi t}{21600}\right|=$$

$$\frac{\pi}{21600}|43200k-11t|=$$

$$\frac{\pi}{21600}|(43197k+3k)-11t|=$$

$$\frac{11\pi}{21600}\left|3927k+\frac{3}{11}k-t\right|$$

よって、$\left|3927k+\frac{3}{11}k-t\right|$を最小にするような(k、t)の組み合わせを求める。

$k \leqq -1$のとき、$\mathbf{0} < \mathbf{t}$より、$\left|3927k+\frac{3}{11}k-t\right|$の最小値は3927より大きい。

$k=0$のとき、$\mathbf{0} < \mathbf{t}$より、$t=1$で最小値$\mathbf{1}$を取る。

$k=(1、2、3、4、5、6、7、8、9、10)$　については、

$\frac{3}{11}k=$

$\left(\frac{3}{11}、1-\frac{5}{11}、1-\frac{2}{11}、1+\frac{1}{11}、1+\frac{4}{11}、2-\frac{4}{11}、2-\frac{1}{11}、2+\frac{2}{11}、2+\frac{5}{11}、3-\frac{3}{11}\right)$

となるから、

$(k、t)=(\mathbf{4}、3927\times\mathbf{4}+\mathbf{1})$　と、$(\mathbf{7}、3927\times\mathbf{7}+\mathbf{2})$

のとき、$\left|3927k+\frac{3}{11}k-t\right|$の最小値は、$\frac{1}{11}$になり、$1\leqq k\leqq 10$では、この値が最も小さい。

$k=11$のとき、$\left|3927k+\frac{3}{11}k-t\right|=|43200-t|$　ここで、$t<43200$より、

$t=43199$で最小値$\mathbf{1}$を取る。

$k\geqq 12$のとき、$t<43200$より、$\left|3927k+\frac{3}{11}k-t\right|$の最小値は3927より大きい。

以上より、求める$(k、t)$の組み合わせは、

$(k、t)=(4、3927\times\mathbf{4}+\mathbf{1})$　…①　または$(7、3927\times\mathbf{7}+\mathbf{2})$…②

①のとき、

$t=3927\times\mathbf{4}+1=15709$　答

また、$15709=4\times3600+21\times60+49$　から、$(x,y,z)=(4,21,49)$　答

②のとき、

$t=3927\times\mathbf{7}+\mathbf{2}=27491$　答

また、$27491=7\times3600+38\times60+11$　から、$(x,y,z)=(7,38,11)$　答

参考

気づいたとは思うが、この問題のモデルは、壁掛け時計である。

0時00分00秒$(x=0、y=0、z=0)$の時には、

時計の短針･長針･秒針$(\overrightarrow{OA}、\overrightarrow{OB}、\overrightarrow{OC})$が、ぴったりと重なる。

しかし、それから、11時59分59秒までの43200秒の間に、一度も、時計の短針と長針がぴったりと重なることはない。

（このことを(２)で示した。）

しかし、ふと時計を見上げてみると、短針と長針が重なって見えることがある。

そこで、「ぴったりとは重ならないとはいえ、長針と短針が一番よく重なって見えるのは何時何分何秒なんだろう」という問の答えを(３)で求めた。

正解は、4時21分49秒　と、7時38分11秒　の２つ。

このように、日常生活の中にも、数学を見出すことはできます。
「針が重なるか重ならないかなんて、そんなことどうでもいいよ」ではなく、
少しでも不思議に思ったことがあるなら、それを探求する意欲を持てるといいですね。
日常に生かせて初めて、数学が「受験のためだけの苦しいもの」から「日々の生活に実用できるもの」に変わります。

(３)は、$|43200k-11t|$の最小値を求める整数問題なのですが、計算量がかなり多いです。
式変形や置き換えを使って、できるだけ計算量を省いてください。…それでも、かなりのボリュームですが。
東大入試にも、このくらいの計算を課す問題は、ザラにあります。
ある東大の教官は、最近の学生の「基礎計算力不足」を嘆いていました。

基礎は日々の地道な努力から。
そのために、まずは、日々数学に触れる生活をしてみてはどうでしょう？